ROYAUME DU MAROC

Ecole Hassania des Travaux Publics



Concours d'Accès en 1ère Année

Réservé aux Titulaires du DEUG

- Epreuve de Mathématiques
- Durée : 3h

Jeudi 22 Juillet 2010

Epreuve de Mathématiques

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice I

1. On considère la fonction g de variable réelle définie par : $g(u) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,dt$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer, pour tout $u > 1$, un réel α_u dans $]0,1[$ tel que : $\displaystyle\int_{\alpha_u}^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{u}}$.
   (c) Dériver $t \mapsto \dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ et intégrer par parties $\displaystyle\int_0^{\alpha_u} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \sin(t\,u)\,dt$ pour en déduire que :
   $$\forall u > 1,\ |g(u)| \leqslant \frac{3}{\sqrt{u}}.$$

2. Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ dont la restriction à $]-\pi,\pi]$ est représentée dans un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ par le demi-cercle de centre O, de rayon π et d'ordonnées positives.
   (a) Pour tout $x \in]-\pi,\pi]$, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x.
   (b) Énoncer le théorème de DIRICHLET. S'applique-t-il à la fonction f ?

3. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de FOURIER trigonométriques de f notés a_n et b_n.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{2}{n} g(\pi n)$.

4. (a) Établir la convergence normale de la série de FOURIER de f. Cela contredit-il le 2°b ?
   (b) Montrer à l'aide du théorème de PARSEVAL que la série de FOURIER de f converge vers f.

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \neq 0$, ainsi que l'équation :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x,y). \qquad (\mathscr{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathscr{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a(x)\,f(x,y).$$
   (b) En déduire que les solutions de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x,y) \mapsto \varphi(x)\,\psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathscr{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ, ψ) ?
   (c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.
   Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathscr{E})$ ne s'annulant pas et telle que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x,0) = g(x) \ \text{ et } \ \forall y \in \mathbb{R},\ f(0,y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
   (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x, y_0)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
   (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.

3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
   (b) Démontrer que F vérifie l'équation ($\mathscr{E}$).
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = \varphi(x)\,\psi(y).$$

Problème

Notations et objectifs

Dans tout le problème, E et F désignent deux espaces vectoriels euclidiens de dimensions au moins égales à 2. Pour chacun de ces espaces, le produit scalaire de deux vecteurs x et y et la norme d'un vecteur x sont respectivement notés $(x \mid y)$ et $||x||$.

$\mathcal{L}(E, F)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

La matrice transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$.

Les candidats pourront utiliser sans le redémontrer qu'un projecteur d'un espace euclidien est un projecteur orthogonal si et seulement si il est symétrique.

L'objet de la première partie est de caractériser la composée de deux projections orthogonales qui commutent. La seconde partie propose une résolution approchée d'une équation linéaire n'ayant pas de solution en introduisant la notion de *pseudo-solution* et la troisième partie généralise la notion d'inverse d'une matrice carrée à une matrice rectangulaire en introduisant la notion de *pseudo-inverse*.

PARTIE I

I.1 Soit x et y deux vecteurs de E, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, X et Y les matrices respectives de x et y dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que : $(x \mid y) = {}^tXY = {}^tYX$.

I.2 Soit H un sous-espace vectoriel de F tel que $1 \leqslant \dim H < \dim F$. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une base orthonormale de H et p le projecteur orthogonal de F sur H.

a) Pour tout $z \in F$, exprimer (sans justification) $p(z)$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$.

b) Soit $\mathcal{C}$ une base orthonormale de F. Relativement à cette base $\mathcal{C}$, on note Z la matrice d'un vecteur z de F, $M(p)$ la matrice de p et pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, E_i la matrice de e_i.

i) Montrer que pour tout $z \in F$, $M(p)Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i{}^tE_iZ$.

ii) En déduire $M(p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} E_i{}^tE_i$.

c) Montrer que pour tout $z \in F$, $||p(z)|| \leqslant ||z||$.

I.3 Exemple : On note M la matrice définie par

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, muni du produit scalaire usuel, d'un projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^4$.

b) Donner une base orthonormale du noyau et une base orthonormale de l'image de ce projecteur

I.4 Soit K un second sous-espace vectoriel de F, r le projecteur orthogonal de F sur K, λ une valeur propre non nulle de $p \circ r$ et u un vecteur propre associé.

a) Montrer que u est élément de H et que $r(u) - \lambda u$ est élément de $H^{\perp}$.

b) Établir l'égalité : $\lambda ||u||^2 = ||r(u)||^2$.

c) En déduire que toutes les valeurs propres de $p \circ r$ sont dans le segment $[0, 1]$.

I.5 On suppose dans cette question que p et r commutent.

a) Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.

b) Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer son spectre.

c) Montrer que : $\operatorname{Ker}(p \circ r) = \operatorname{Ker} p + \operatorname{Ker} r$ et $\operatorname{Im}(p \circ r) = \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} r$.

I.6 On pose $m = \dim F$ et on choisit une base orthonormale de F telle que les matrices de p et r dans cette base soient respectivement les matrices décomposées en blocs :

$$P = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où I_k est la matrice unité d'ordre k, A une matrice carrée d'ordre k et D une matrice carrée d'ordre $m - k$.

a) Montrer que les matrices A, B, C, D vérifient les relations :

$$A^2 + BC = A \ , \ AB + BD = B \ , \ CB + D^2 = D \ , \ {}^tA = A \ , \ {}^tB = C \ , \ {}^tD = D$$

b) Montrer que les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le spectre de $p \circ r$ est inclus dans $\{0, 1\}$.

ii) ${}^tCC = 0$.

iii) $C = 0$.

iv) p et r commutent.

PARTIE II

Dans cette partie, sont donnés un élément f de $\mathcal{L}(E, F)$ et un élément v de F.

II.1 En considérant la projection orthogonale de v sur l'image de f, montrer qu'il existe un élément x_0 de E tel que :

$$||f(x_0) - v|| = \min_{x \in E} ||f(x) - v||$$

Dans la suite x_0 sera appelée une *pseudo-solution* de l'équation :

$$f(x) = v \qquad (*)$$

II.2 Montrer que si f est injective, alors l'équation $(*)$ admet une pseudo-solution unique.

II.3 Montrer que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si pour tout x appartenant à E : $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$.

II.4 Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ deux bases orthonormales de E et F respectivement. On appelle A la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$, V la matrice de v dans $\mathcal{C}$ et X_0 celle de x_0 dans $\mathcal{B}$. Ecrire sous forme matricielle l'équation $(f(x) \mid f(x_0) - v) = 0$ et en déduire que x_0 est pseudo-solution de l'équation $(*)$ si et seulement si :

$${}^tAAX_0 = {}^tAV$$

II.5 Exemple : Dans cette question, on prend $E = F = \mathbb{R}^3$ munis du produit scalaire usuel. Relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$, les matrices de f et v sont respectivement :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ \text{et} \ V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les pseudo-solutions de l'équation $f(x) = v$.

II.6 Application : n désignant un entier supérieur ou égal à deux, on considère trois éléments $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ de $\mathbf{R}^n$ et on souhaite trouver deux réels λ et μ tels que la somme $\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k - c_k)^2$ soit minimale.

a) Montrer que ce problème équivaut à la recherche des pseudo-solutions d'une équation $(*)$: $f(x) = v$ où f est un élément de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^n)$. Préciser le vecteur v et donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^2$ et $\mathbf{R}^n$.

b) Comment doit-on choisir a et b pour que l'application f soit injective ?

c) Lorsque cette dernière condition est réalisée, donner la solution du problème posé en exprimant λ et μ à l'aide de produits scalaires dans $\mathbf{R}^n$.

PARTIE III

Dans cette partie, f désigne toujours un élément de $\mathcal{L}(E, F)$.

III.1 a) Soit y un élément de F. Montrer qu'il existe deux vecteurs x et y' tels que :

$$y = f(x) + y' ; \ (x, y') \in (\operatorname{Ker} f)^{\perp} \times (\operatorname{Im} f)^{\perp}$$

b) Montrer qu'un tel couple (x, y') est unique. On peut alors définir l'application g de F vers E qui à y fait correspondre x.

c) Montrer que l'application g est linéaire. g sera appelée l'application *pseudo inverse* de f.

III.2 Déterminer le noyau et l'image de g.

III.3 a) Montrer que $g \circ f$ est le projecteur orthogonal de E sur $(\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que $f \circ g$ est le projecteur orthogonal de F sur $\operatorname{Im} f$.

III.4 Premier exemple : On prend $E = \mathbf{R}^3$, $F = \mathbf{R}^2$ munis de leur produit scalaire usuel. La matrice de f relativement aux bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement aux bases canoniques.

III.5 Dans cette question, on suppose que $E = F$ et que f est un endomorphisme symétrique.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g. (On pourra discuter suivant que la valeur propre associée est nulle ou non).

c) En déduire que g est aussi un endomorphisme symétrique de E.

III.6 Deuxième exemple : On prend $E = F = \mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. La matrice de f relativement à la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Déterminer la matrice de g relativement à la base canonique.

Fin de l'énoncé